6 класс

Задача 1. Таня сфотографировала четырёх котиков, поедающих сосиски (рис. 1). Вскоре она сделала ещё один кадр (рис. 2). Каждый котик ест свои сосиски непрерывно и с постоянной скоростью, а на чужие не покушается. Кто доест первым и кто последним? Ответ объясните.

Рис. 1

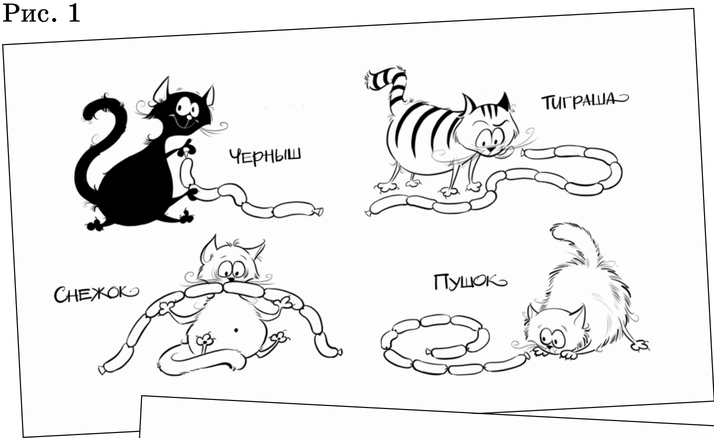
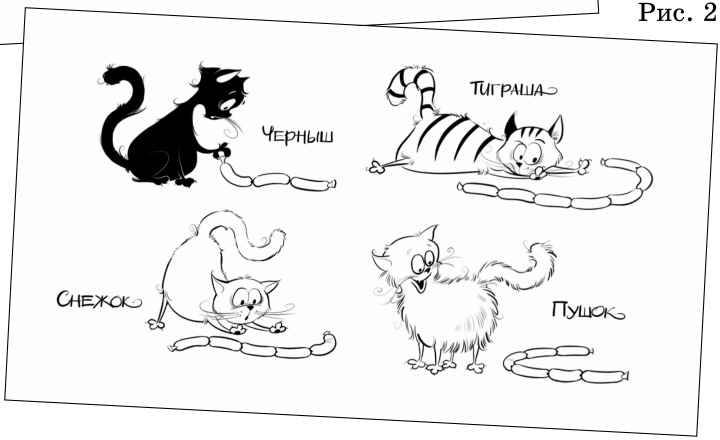


Рис. 2



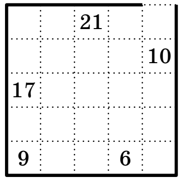
[*5 баллов*]

(*Т. И. Голенищева-Кутузова, Т. В. Казицына, А. А. Трунин*)

Ответ. Первым доест Тиграша, последним — Снежок.

Решение. За время, которое прошло между двумя фотографиями, Черныш съел 2 сосиски, Тиграша 5, Снежок 3, а Пушок 4. Подождём ещё такое же время и снова посмотрим на котиков. Черныш съест ещё 2 сосиски, ему останется одна, то есть понадобится ещё половина того времени. То же и с Пушком: он съест 4, и ему останется доесть две сосиски, на что тоже уйдёт половина того времени. Тиграша съест 5 сосисок, и ему останется съесть две, что меньше половины от пяти. Снежок же съест 3 сосиски, и ему останется две, что составляет более половины от трёх. Поэтому Тиграша справится со своими сосисками раньше всех, а Снежок — позже всех.

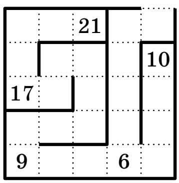
Задача 2. На клетчатой бумаге был нарисован лабиринт: квадрат 5×5 (внешняя стена) с выходом шириной в одну клетку, а также внутренние стенки, идущие по линиям сетки. На рисунке мы скрыли от вас все внутренние стенки. Начертите, как они могли располагаться, зная, что числа, стоящие в клетках, показывают наименьшее количество шагов, за которое можно было покинуть лабиринт, стартовав из этой клетки (шаг делается в соседнюю по стороне клетку, если они не разделены стенкой). Достаточно одного примера, пояснения не нужны.



[*5 баллов*]

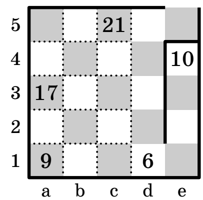
(*М. А. Евдокимов, А. В. Хачатурян*)

Ответ. См. рисунок.

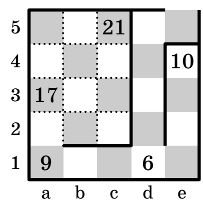


Комментарий. Можно доказать, что внутренние стенки были расположены именно так. Будем постепенно восстанавливать стенки, исходя из условия задачи. Жирной линией обозначим стенки, в наличии которых мы уверены, линиями из точек обозначим пока не исследованные границы, а в тех местах, где точно есть проход, линию сотрём совсем. Чтобы отдельные клетки были хорошо видны, раскрасим лабиринт в шахматном порядке. Ну и раз уж наш рисунок стал похож на шахматную доску, воспользуемся обозначениями, принятыми у шахматистов, —

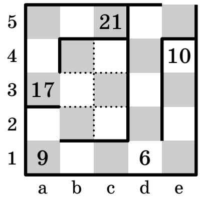
обозначим столбцы латинскими буквами, а строки — цифрами. Заметим, что между e4 и e5 точно есть стенка, иначе в e4 было бы 2, а не 10. Теперь посмотрим на клетку d1 с цифрой 6. Из неё до выхода шесть шагов, даже если бы никаких стенок не было, поэтому из d1 к выходу можно пройти по столбцам d и e с одним переходом из d в e. Стенка между e4 и e5 показывает, что переход этот возможен только между d5 и e5, поэтому весь столбец d свободен от поперечных стенок. Наоборот, между d4 и e4, d3 и e3, d2 и e2 стенки есть, иначе из e4 можно было бы выйти быстрее, чем за десять шагов. Вот что у нас получилось:



Из c5 можно выйти за 21 шаг. Поскольку клеток 25, а заходить в «аппендикс» e1–e4 значит удлинять путь, кратчайший путь из c5 пройдёт по всем остальным клеткам лабиринта. И это значит, что последние шесть клеток этого пути начнутся в d1, то есть между столбцами c и d везде, кроме первой строки, есть стенки — иначе в столбец d можно было бы попасть раньше. Путь из a1 по первой строке до d1 и далее уже по известной дороге занимает ровно девять шагов, и теперь понятно, что отклоняться от него нельзя. А тогда между c1 и c2, b1 и b2 есть стенки, иначе длинный путь из c5 можно было бы сократить. Вот что нам теперь понятно:



Путь из c5 проходит через a3, то есть туда из c5 мы должны попасть за четыре шага. С учётом необходимости посещения клетки a5 это можно сделать только одним способом. У нас не должно быть возможности свернуть с этого отрезка пути, поэтому между c5 и c4, b5 и b4, a4 и b4 есть стенки. Стенка есть и между a3 и a2, иначе в a3 было бы 11, а не 17. Вот что сейчас получилось:



Теперь нетрудно восстановить две оставшиеся стенки и получить ответ.

Задача 3. На доске написаны числа 2, 3, 4, ..., 29, 30. За рубль можно отметить любое число. Если какое-то число уже отмечено, можно бесплатно отмечать его делители и числа, кратные ему. За какое наименьшее число рублей можно отметить все числа на доске? **[*6 баллов*]**

(*И. В. Ященко*)

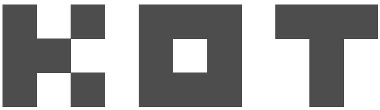
Ответ. За 5 рублей.

Решение. Отметим числа 17, 19, 23 и 29, потратив четыре рубля. Затем отметим число 2, потратив ещё рубль. После этого мы сможем бесплатно отметить все чётные числа (так как они делятся на 2), а после этого все нечётные числа, не превосходящие 15, — для любого из них (допустим, для числа n) чётное число $2n$ у нас отмечено, и мы можем отметить n как его делитель. Осталось отметить 21, 25 и 27, и это тоже делается бесплатно: 25 делится на отмеченное число 5, а 21 и 27 — на отмеченное число 3. При любом способе решения задачи простые числа 17, 19, 23 и 29, превышающие 15, придётся отмечать за деньги — они не являются делителями или кратными каких-либо чисел на доске. Значит, 4 рубля мы потратим только на них. Чтобы отметить хотя бы что-то ещё, придётся тратить пятый рубль. Значит, дешевле чем за пять рублей условия задачи не выполнить.

Комментарий. На самом деле, отметив «большие» простые числа, мы могли бы вместо двойки отметить любое из оставшихся чисел на доске. В самом деле, потом мы бесплатно отметим его наименьший простой делитель p. Если $p = 2$, действуем по алгоритму, описанному выше. Если нет, отмечаем $2p$ (это можно сделать, так как $p < 15$), потом отмечаем двойку, а дальше всё остальное уже известным способом.

Аналогичное решение применимо и для произвольно длинного набора 2, 3, 4, ..., N — мы вынуждены отметить за деньги все «большие» простые числа (превышающие $N/2$), а потом отмечаем за рубль любое из оставшихся чисел. Далее бесплатно отмечаем двойку способом, описанным выше, затем отмечаем все чётные числа, потом все «малые» простые числа (не превышающие $N/2$), потому что любое «малое» p будет делителем $2p$. Теперь можно отметить все остальные неотмеченные числа: каждое из них будет делиться на свой минимальный простой делитель — «малое» простое число.

Задача 4. Миша сложил из кубиков куб $3 \times 3 \times 3$. Затем некоторые соседние по грани кубики он склеил друг с другом. Получилась цельная конструкция из 16 кубиков, остальные кубики Миша убрал. Обмакнув конструкцию в чернила, он поочерёдно приложил её к бумаге тремя гранями. Вышло слово КОТ (см. рис.). Что получится, если отпечатать грань, противоположную букве «О»?



[*8 баллов*]

(*М. А. Евдокимов, О. А. Заславский, А. В. Шаповалов*)

Ответ. См. рисунок.

Решение. Поскольку можно напечатать букву Т, какие-то два угловых кубика убраны. Остальные шесть угловых кубиков должны остаться, так как иначе не получится напечатать К и О. Отсюда получаем, что буквы К и О расположены на соседних гранях, причем все три кубика, соединяющие эти грани, есть. Теперь букву Т можно расположить только на грани, противоположной букве К. Итак, места 13 из 16 кубиков определены (см. рис. 1). Оставшиеся три должны скрепить конструкцию. Кубики с цифрами 1 и 2 сейчас как бы «висят в воздухе» — они не приклеены ни одной своей гранью к остальным. Причём если их какой-то гранью и можно приклеивать, то только той, на которой мы написали цифры 1 и 2. Поэтому к этим граням у Миши неминуемо приклеено по кубику. Но эти кубики всё ещё не делают конструкцию жёсткой: пары склеенных только что кубиков продолжают «висеть в воздухе». Мише удалось всё закрепить ровно одним добавочным кубиком — значит, он приклеил его к обеим парам. Не испортив букву К, это можно сделать единственным образом (см. рис. 2).

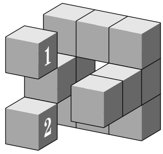


Рис. 1

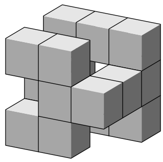


Рис. 2

Теперь можно посмотреть на грань, противоположную грани «О», и нарисовать ответ (с точностью до поворота грани).

Задача 5. В лесу живёт 40 зверей — лисицы, волки, зайцы и барсуки. Ежегодно они устраивают бал-маскарад: каждый надевает маску животного другого вида, причём два года подряд они одну и ту же маску не носят. Два года назад на балу было 12 «лисиц» и 28 «волков», год назад — 15 «зайцев», 10 «лисиц» и 15 «барсуков», а в этом году — 15 «зайцев» и 25 «лисиц». Каких зверей в лесу больше всего? **[*8 баллов*]** (*М.А. Хачатурян*)

Ответ. Больше всего барсуков.

Решение. Запишем данные задачи в виде таблицы.

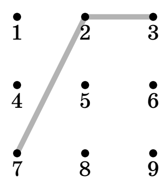
	«Волки»	«Лисы»	«Зайцы»	«Барсуки»
Два года назад	28	12		
Год назад		10	15	15
В этом году		25	15	

Посмотрим на «зайцев». Последние два года в масках зайцев было 30 зверей. Всё это разные звери, так как никто два года подряд маску зайца не наденет. И это не зайцы. Значит в лесу есть по крайней мере 30 не-зайцев, то есть зайцев не более $40 - 30 = 10$. Такое же рассуждение про зверей, которые два последних года были на празднике «лисами», показывает, что настоящих лис не более чем $40 - 10 - 25 = 5$. Два года назад на маскараде было 28 «волков», и всё это были не настоящие волки, настоящих же не более $40 - 28 = 12$. Итак, волков, лис и зайцев вместе не более чем $12 + 5 + 10 = 27$. Это значит, что барсуков как минимум $40 - 27 = 13$, и это самый многочисленный вид животных в лесу.

Заметим, что можно подобрать количества зверей каждого вида и так распределить маски, чтобы все условия задачи выполнялись. От участников олимпиады приводить такой пример не требовалось, но любознательный читатель, мы надеемся, сможет при желании его придумать.

Задача 6. Ваня придумывает число из неповторяющихся цифр без нулей — пароль для своего телефона. Пароль работает так: если, не отрывая палец от экрана, последовательно соединить отрезками точки, соответствующие цифрам пароля, телефон разблокируется. При этом телефон не позволяет соединять отрезком две точки, между которыми есть третья: если Ваня соединит, например, 1 и 3, телефон «подумает», что Ваня вводит 1-2-3.

Ваня хочет, чтобы при вводе пароля линия движения пальца не пересекала сама себя. А ещё чтобы перестановкой цифр пароля ни в каком порядке, кроме обратного, нельзя было получить другую такую линию. Например, пароль 1263 Ване не нравится, так как линия 6-3-2-1 другая, но тоже не имеет самопересечений.

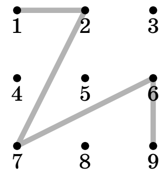


Ваня придумал пароль 723 (см. рис.). Эти три цифры — 2, 3 и 7 — действительно никакой другой линией соединить нельзя. Жаль только, что пароль такой короткий.

Помогите Ване придумать пароль подлиннее. В ответе напишите сам пароль и нарисуйте ту единственную линию, которую можно получить из этих цифр. ***[8 баллов]***

(*И. В. Ященко*)

Ответ. Например, 12769. См. рисунок.



Этот пароль удовлетворяет Ваниным требованиям. Посмотрим, как можно соединить без самопересечений его цифры. Цифру 7 с какой-то цифрой соединить надо, это может быть либо 2, либо 6. Пусть, например, мы провели отрезок 7-6. Теперь 9 можно соединить только с 6. Далее неизбежно надо провести отрезки 7-2 и 2-1, и мы получаем линию, изображённую на рисунке. Если бы мы сначала вместо 7-6 провели 7-2, линия получилась бы та же самая. Таким образом, эта линия единственна.

Комментарий. Интересно, что устраивающий Ваню пароль из четырёх цифр придумать невозможно. Не существует и пароля из шести и более цифр. Пятизначных паролей возможно восемь: 12769, 96721, 14389, 98341, 32947, 74923, 78163, 36187. Впрочем, линии для всех восьми паролей одной и той же формы, а отличаются только поворотом, симметрией или направлением вычерчивания.